

A Major Discovery in Mathematical Physics Demonstrating the Emergence of Algebraic Structure from Physical Invariance

Paper Presented

**Isomorphism between Complex Quaternionic Structure and Three-Dimensional
Multiplicative-Invariant Geometry
— From Multiplicative-Norm-Preserving Closure to Energy–Phase-Gradient
Representation**

Concise Abstract

This study investigates how quaternion algebra can emerge from the physical multiplicative invariance of complex energy, instead of presupposing an abstract quaternionic structure and applying it to a physical system. A complex dual-energy state is defined as $S = P + \mathbb{I}Q$, with the normalized multiplicative invariant $I_{MI} = N_{\mathbb{C}}(S) = SS^* = P^2 + Q^2$. The complementary energy freedom Q is then unfolded into a three-dimensional phase-gradient vector $\vec{Q}$. Under the normalization condition $Q^2 = |\vec{Q}|^2$, the bridge relation $I_{MI} = N_{\mathbb{H}}(P + \vec{Q})$ is established between physical multiplicative invariance and the quaternion norm.

A multiplicative norm-composition law, $N(A \odot B) = N(A)N(B)$, is subsequently imposed on a general rotationally covariant scalar–vector bilinear product in three dimensions. This condition determines the initially unspecified coefficients as $\alpha = 1$ and $\beta = \pm 1$ and thereby reconstructs standard quaternion multiplication uniquely up to the choice of spatial orientation. Quaternion algebra is therefore interpreted not as an arbitrarily introduced abstract computational device, but as a norm-preserving, noncommutative composition algebra that emerges when the multiplicative invariance of complex energy is closed in three-dimensional directional space.

The result demonstrates that a physical invariant can select the mathematical structure required to express its own closure. It provides a concrete mathematical-physics realization of the “essence-based inductive ontology” pursued by COD and proposes a bottom-up scientific methodology for investigating the physical origins of abstract algebraic structures.

Introduction to the Paper

34 The essential question addressed by this paper is:

35 Is quaternion algebra merely a useful abstract algebra chosen by humans to describe nature,
36 or is it an algebraic structure that necessarily emerges when physical invariance is closed in
37 three-dimensional space?

38 The paper approaches this question through the following logical chain:

39 Complex Dual Energy
40 $\Rightarrow$ Normalized Physical Multiplicative Invariance
41 $\Rightarrow$ Three-Dimensional Energy–Phase-Gradient Representation
42 $\Rightarrow$ Multiplicative Norm Composition
43 $\Rightarrow$ Quaternion Algebra.

44 **1. Physical Multiplicative Invariance of Complex Energy**

45 The physical starting point is the complex dual-energy state

46 $S = P + \mathfrak{i}Q,$

47 where

48 $\mathfrak{i}^2 = -1.$

49 Here, P denotes the real energy component, while Q represents its complementary energy–
50 spatial freedom. The normalized multiplicative invariant of the total complex-energy state is
51 defined as

52 I_{MI}
53 $= N_C(S)$
54 $= SS^*$
55 $= P^2 + Q^2.$

56 This relation does not imply that the two components are separately conserved. It expresses a
57 relational conservation structure in which the constituent freedoms may be complementarily
58 reorganized while the norm of the total complex-energy state remains invariant.

59 Moreover, the complex norm intrinsically satisfies the multiplicative composition law

60 $N_C(S_1 S_2)$
61 $= N_C(S_1) N_C(S_2).$

62 Multiplicative norm composition is therefore not an additional condition introduced
63 retrospectively to obtain quaternion algebra. It is already present in the multiplicative-
64 invariant structure of complex energy.

2. From Complex Energy to Three-Dimensional Phase Geometry

The complementary scalar freedom Q is unfolded into a three-dimensional phase-geometric vector:

$$\begin{aligned} \vec{Q} \\ = Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Within the COD energy–phase-gradient representation, each axial component is written as

$$Q_i = \kappa_i r_i = C_i.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \vec{Q} \\ = \sum_{i=1}^3 (\kappa_i r_i) \mathbf{e}_i \\ = \sum_{i=1}^3 C_i \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Here, κ_i denotes the phase gradient along the i th axis, r_i is its complementary spatial degree of freedom, and

$$\kappa_i r_i = C_i$$

represents the axial physical multiplicative invariant.

The corresponding scalar–vector state is

$$\mathcal{Q} = P + \vec{Q},$$

and its quaternion norm is

$$\begin{aligned} N_H(\mathcal{Q}) \\ = \mathcal{Q}\mathcal{Q}^* \\ = P^2 + |\vec{Q}|^2. \end{aligned}$$

Under the normalization condition

$$Q^2 = |\vec{Q}|^2,$$

the following bridge equation is obtained:

$$\begin{aligned} I_{MI} \\ = N_C(P + \mathbf{i}\vec{Q}) \\ = N_H(P + \vec{Q}). \end{aligned}$$

This equation shows that the physical multiplicative invariant of complex energy and the three-dimensional quaternion norm are two representations of the same normalized invariant structure.

3. Emergence of Quaternion Algebra from Multiplicative Norm Composition

Let the state space be

$$\mathcal{A} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3,$$

with

$$A = (a, u), \quad B = (b, v).$$

Without introducing the quaternion multiplication table in advance, consider a general three-dimensional rotationally covariant scalar–vector bilinear product:

$$\begin{aligned} A \odot B \\ = (ab - \alpha u \cdot v, av + bu + \beta u \times v). \end{aligned}$$

The coefficients α and β are initially undetermined. The following condition is then imposed as the algebraic inheritance of the physical multiplicative invariance of complex energy:

$$N(A \odot B) = N(A)N(B),$$

where

$$N(A) = a^2 + |u|^2.$$

Requiring this identity to hold for arbitrary a, b, u , and v yields

$$\alpha = 1$$

and

$$\beta^2 = 1.$$

Therefore,

$$\beta = \pm 1,$$

and

$$\begin{aligned} A \odot B \\ = (ab - u \cdot v, av + bu \pm u \times v). \end{aligned}$$

118 Choosing the spatial orientation $\beta = +1$ gives

119 $A \odot B$

120 $= (ab - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, a\mathbf{v} + b\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}),$

121 which is exactly the scalar–vector form of standard quaternion multiplication.

122 It follows that

123 $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3, \odot) \cong \mathbb{H}.$

124 The alternative sign $\beta = -1$ does not represent a different physical principle; it corresponds to
125 the opposite spatial orientation. The multiplicative norm-composition condition selects both
126 the inner-product term responsible for scalar closure and the cross-product term responsible
127 for noncommutative directional generation.

128 **4. What Has Been Newly Revealed?**

129 This study does not claim to discover quaternion algebra itself. It addresses a more
130 fundamental question:

131 Why should the three-dimensional energy–spatial structure of nature require quaternion
132 algebra?

133 The answer proposed by this paper is:

134 Because the normalized multiplicative invariant of complex energy must remain preserved
135 under three-dimensional rotationally covariant scalar–vector composition.

136 Quaternion algebra is therefore reconstructed as the algebraic structure that emerges when the
137 following conditions are simultaneously satisfied:

- 138 • complex dual energy,
- 139 • physical multiplicative invariance,
- 140 • three-dimensional directional freedom,
- 141 • rotational covariance,
- 142 • multiplicative norm composition, and
- 143 • noncommutative directional closure.

144 The central result can be condensed into the following statement:

145 Quaternionic multiplication emerges as the three-dimensional scalar–vector composition law
146 that preserves the normalized multiplicative invariant of complex dual energy.

147 **5. Significance for Scientific Methodology**

148 The conventional mathematical construction of a physical theory often proceeds in the
149 following direction:

150 Selection of a Mathematical Formalism
151 $\Rightarrow$ Application to a Physical System
152 $\Rightarrow$ Explanation of Observed Phenomena.

153 The present study reverses this order:

154 Identification of Physical Essence and Invariance
155 $\Rightarrow$ Establishment of Minimal Spatial Conditions
156 $\Rightarrow$ Openness of the Possible Composition Laws
157 $\Rightarrow$ Selection of an Algebraic Structure by Invariance
158 $\Rightarrow$ Independent Physical Verification.

159 This is the central methodology of the “essence-based inductive ontology” proposed by COD.

160 Essence-based inductive ontology does not force nature into a previously selected
161 mathematical framework. It first identifies the most fundamental invariant relation of a
162 physical system and then inductively determines which mathematical structure can express
163 that invariance consistently.

164 In this study, the method performs a concrete selection:

165 Physical Invariance
166 $\Rightarrow$ Algebraic Emergence.

167 Essence-based inductive ontology is therefore implemented not merely as a philosophical
168 declaration, but as a mathematical-physics procedure that selects a specific algebra from a
169 general composition structure containing undetermined coefficients.

170 **6. Time-Independent Phase Equilibrium and QGE Verification**

171 The physical foundation of this research is not relaxation along a physical time axis, but the
172 phase equilibrium of a time-independent complex stationary-wave structure:

173 $\partial\Psi/\partial t = 0.$

174 Computational iteration in QGE therefore does not represent the temporal evolution of
175 nature. It is an algebraic procedure for determining whether a single stationary phase
176 structure can simultaneously satisfy the following conditions:

177 $\kappa_i r_i = C_i,$

178 $N(Q_1 \odot Q_2)$
179 $= N(Q_1)N(Q_2),$

and

$$\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0.$$

The mathematical quaternionic isomorphism is established analytically. The following properties, however, remain independent physical realization conditions to be tested by QGE:

- autonomous emergence of three independent phase-gradient axes,
- three-axis isotropy or stable orthogonal organization,
- axial norm closure,
- noncommutative directional generation,
- simultaneous minimization of the MI residual and quaternion-closure residual, and
- distinction among the autonomous emergence of 90° , 120° , and $\sqrt{3}$ geometry without imposed target values.

QGE is therefore not a circular device required to establish the theorem. Its role is to test, in a falsifiable manner, whether the theorem's physical realization conditions emerge autonomously in an actual time-independent phase-equilibrium system.

7. Significance for Mathematical Physics and the History of Science

This paper redefines the relationship between abstract algebra and physics.

The conventional direction is

Abstract Algebra
 $\Rightarrow$ Physical Application.

The direction proposed by this study is

Physical Invariance
 $\Rightarrow$ Algebraic Selection
 $\Rightarrow$ Physical Realization.

The significance of this transition does not lie in another application of quaternion algebra. It lies in demonstrating, through a concrete mathematical construction, that a physical invariant can select the algebraic structure required to express itself.

When the multiplicative invariance of complex energy is unfolded into three-dimensional directional space:

- the inner product produces scalar closure,
- the cross product generates a new direction,
- spatial orientation appears through $\beta = \pm 1$,
- noncommutativity emerges from the antisymmetry of the cross product, and
- the total norm remains multiplicatively preserved under composition.

213 Each component of the algebra therefore performs a structural role required for the closure of
214 physical invariance, rather than functioning as an arbitrary symbolic rule.

215 **Conclusion**

216 The essence of this paper is summarized by the statement:

217 A major discovery in mathematical physics demonstrating the emergence of algebraic
218 structure from physical invariance.

219 Its specific mathematical structure is

220 Complex Dual Energy
221 $\Rightarrow$ Normalized Physical Multiplicative Invariance
222 $\Rightarrow$ Three-Dimensional Energy–Phase-Gradient Representation
223 $\Rightarrow$ Multiplicative-Norm-Preserving Closure
224 $\Rightarrow$ Quaternion Algebra.

225 In compact form,

226 I_{MI}
227 $= N_{\mathbb{C}}(P + \mathbf{i}Q)$
228 $= N_{\mathbb{H}}(P + \vec{Q}),$

229 together with

230 $N(A \odot B)$
231 $= N(A)N(B).$

232 These conditions select

233 $\alpha = 1, \quad \beta = \pm 1$

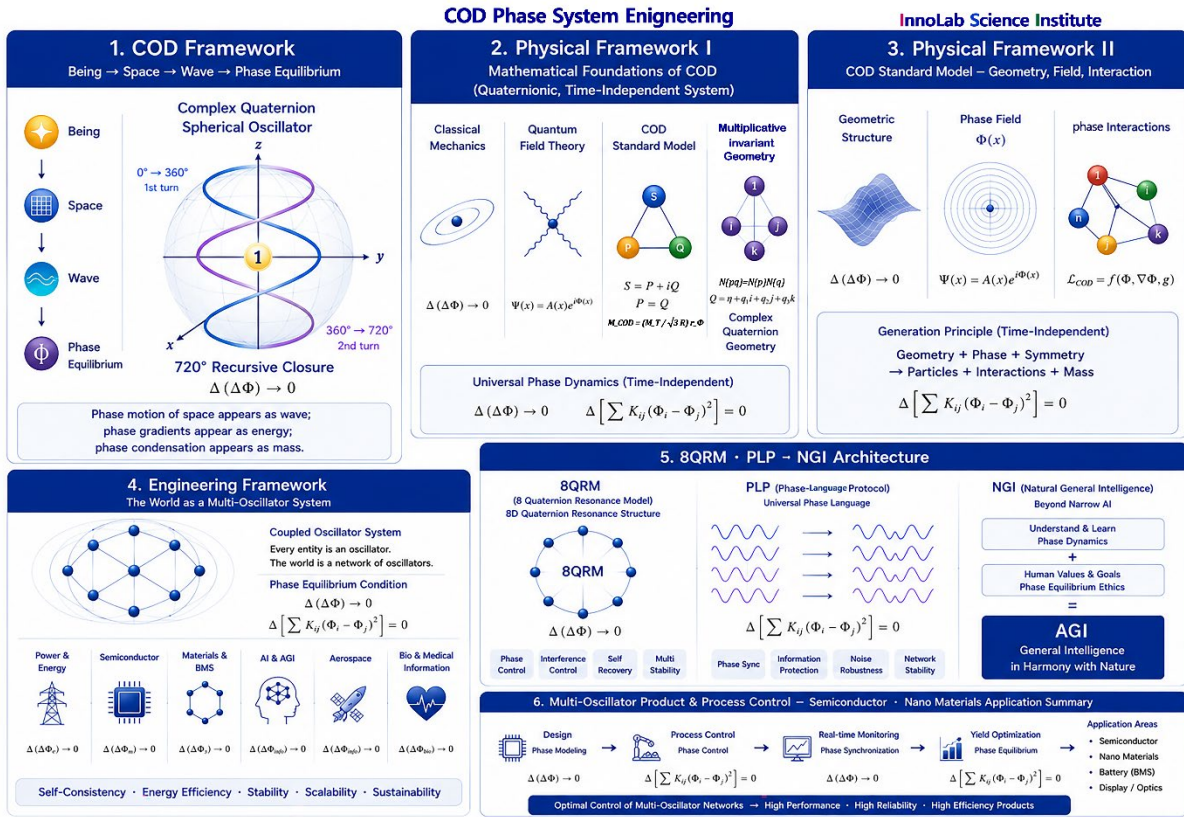
234 and establish

235 $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3, \odot) \cong \mathbb{H}.$

236 The central achievement of this study is therefore not another use of quaternion algebra, but a
237 reconstruction of its physical origin. When the multiplicative invariance of complex dual
238 energy is unfolded into three-dimensional energy–phase-gradient geometry, quaternion
239 algebra emerges as the composition algebra that preserves that invariant.

240 This is a mathematical-physics result showing how algebraic structure can emerge from
241 physical invariance and a representative realization of the essence-based inductive ontology
242 pursued by COD as a practical scientific problem-solving methodology.

COD Phase System Engineering Structure



A Major Discovery in Mathematical Physics Demonstrating the Emergence of Algebraic Structure from Physical Invariance

물리적 불변성으로부터 대수구조의 출현을 입증한 주요 수리물리학적 발견

대상 논문

Isomorphism between Complex Quaternionic Structure and Three-Dimensional
Multiplicative-Invariant Geometry
— From Multiplicative-Norm-Preserving Closure to Energy-Phase-Gradient
Representation

간결한 초록

본 연구는 추상적인 쿼터니언 대수를 물리계에 선형적으로 적용하는 대신, 복소
에너지의 물리적 승산불변으로부터 쿼터니언 대수구조가 어떻게 출현하는지를
규명한다. 복소 쌍대에너지 상태 $S = P + \mathbf{i}Q$ 의 정규화된 승산불변량을 $I_{MI} =$
 $N_{\mathbb{C}}(S) = SS^* = P^2 + Q^2$ 로 정의하고, 상보적 에너지 자유도 Q 를 3차원 위상경사
벡터 $\vec{Q}$ 로 전개한다. 정규화 조건 $Q^2 = |\vec{Q}|^2$ 아래에서 $I_{MI} = N_{\mathbb{H}}(P + \vec{Q})$ 가
성립하며, 물리적 승산불변과 쿼터니언 노름 사이의 브리지가 형성된다.

이어 3차원 회전 공변적인 일반 스칼라-벡터 쌍선형 곱에 승산적 노름 합성조건
 $N(A \odot B) = N(A)N(B)$ 를 부과한다. 이 조건은 미정계수 α 와 β 를 $\alpha = 1, \beta = \pm 1$ 로
결정하며, 방향 선택을 제외하고 표준 쿼터니언 곱셈을 유일하게 재구성한다.
따라서 본 연구는 쿼터니언 대수를 임의로 도입된 추상적 계산도구가 아니라,
복소 에너지의 승산불변이 3차원 방향공간에서 폐합될 때 출현하는 노름 보존적
비가환 합성대수로 해석한다.

268 이 결과는 물리적 불변량이 그 불변성을 표현하는 수학적 구조를 스스로 선택할
269 수 있음을 보여준다. 이는 COD가 추구해 온 ‘본질 기반 귀납적 존재론’의
270 구체적인 수리물리학적 실현이며, 추상대수의 물리적 발생원리를 탐구하는
271 새로운 Bottom-Up 과학방법론을 제시한다.

272

273 **논문의 핵심 내용**

274 이 논문이 다루는 본질적인 질문은 다음과 같다.

275 쿼터니언은 단지 자연을 설명하기 위해 인간이 선택한 유용한 추상대수인가,
276 아니면 자연의 물리적 불변성이 3차원 공간에서 폐합될 때 필연적으로 출현하는
277 대수구조인가?

278 논문은 이 질문에 답하기 위해 다음의 논리적 사슬을 구성한다.

279 복소 쌍대에너지
280 ⇒ 정규화된 물리적 승산불변
281 ⇒ 3차원 에너지-위상경사 표현
282 ⇒ 승산적 노름 합성
283 ⇒ 쿼터니언 대수.

284 **1. 복소 에너지의 물리적 승산불변**

285 물리적 출발점은 복소 쌍대에너지 상태이다.

286 $S = P + iQ$,

287 $i^2 = -1$.

288 여기서 P 는 실재 에너지 성분이고, Q 는 이에 상보적인 에너지-공간 자유도이다.
289 전체 복소 에너지의 정규화된 승산불변량은 다음과 같이 정의된다.

290 I_{MI}
291 $= N_C(S)$

$$= SS^*$$

$$= P^2 + Q^2.$$

이는 단순히 두 변수가 개별적으로 보존된다는 뜻이 아니다. 구성 자유도가 상보적으로 재조직되더라도 전체 복소 에너지 노름이 보존된다는 관계적 보존구조이다.

더욱이 복소 노름은 본질적으로 다음의 승산적 합성법칙을 만족한다.

$$N_C(S_1 S_2)$$

$$= N_C(S_1) N_C(S_2).$$

따라서 승산적 노름 합성은 쿼터니언을 얻기 위해 사후적으로 추가한 조건이 아니라, 복소 에너지 상태에 이미 내재한 승산불변 구조이다.

2. 복소 에너지에서 3 차원 위상기하로의 전개

상보적 스칼라 자유도 Q 를 3 차원 위상기하 벡터로 전개한다.

$$\vec{Q}$$

$$= Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3.$$

COD 의 에너지-위상경사 표현에서는 각 축의 성분을 다음과 같이 나타낸다.

$$Q_i = \kappa_i r_i = C_i,$$

따라서

$$\vec{Q}$$

$$= \sum_{i=1}^3 (\kappa_i r_i) \mathbf{e}_i$$

$$= \sum_{i=1}^3 C_i \mathbf{e}_i.$$

여기서 κ_i 는 축별 위상경사, r_i 는 이에 상보적인 공간자유도이며,

$$\kappa_i r_i = C_i$$

는 축별 물리적 승산불변을 나타낸다.

이에 대응하는 스칼라-벡터 상태는

316 $Q = P + Q^\rightarrow$

317 이고, 그 노름은

318 $N_H(Q)$
 319 $= Q\overline{Q}$
 320 $= P^2 + |Q^\rightarrow|^2$

321 이다.

322 정규화 조건

323 $Q^2 = |Q^\rightarrow|^2$

324 아래에서 다음의 브리지 방정식이 성립한다.

325 I_{MI}
 326 $= N_C(P + iQ)$
 327 $= N_H(P + Q^\rightarrow).$

328 이 식은 복소 에너지의 물리적 승산불변과 3 차원 쿼터니언 노름이 동일한
 329 정규화된 불변구조의 서로 다른 표현임을 보여준다.

330 3. 승산적 노름 합성에서 쿼터니언의 출현

331 다음으로 상태공간을

332 $\mathcal{A} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$

333 로 두고,

334 $A = (a, u), \quad B = (b, v)$

335 를 정의한다.

336 쿼터니언 곱셈표를 미리 도입하지 않고, 가장 일반적인 3 차원 회전 공변적
 337 스칼라-벡터 쌍선형 곱을 다음과 같이 설정한다.

338 $A \odot B$
 339 $= (ab - \alpha u \cdot v, av + bu + \beta u \times v).$

340 여기서 α 와 β 는 미리 결정되지 않은 계수이다. 이제 복소 에너지의 물리적
341 승산불변을 계승하는 조건으로 다음을 부과한다.

342 $N(A \odot B) = N(A)N(B),$

343 $N(A) = a^2 + |u|^2.$

344 이 항등식이 모든 a, b, u, v 에 대해 성립하도록 요구하면

345 $\alpha = 1,$

346 $\beta^2 = 1$

347 이 도출된다. 따라서

348 $\beta = \pm 1$

349 이고,

350 $A \odot B$

351 $= (ab - u \cdot v, av + bu \pm u \times v)$

352 를 얻는다.

353 공간의 방향성을 $\beta = +1$ 로 선택하면

354 $A \odot B$

355 $= (ab - u \cdot v, av + bu + u \times v)$

356 가 되며, 이것은 정확히 표준 쿼터니언 곱셈의 스칼라-벡터 형식이다.

357 따라서

358 $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3, \odot) \cong \mathbb{H}$

359 가 성립한다.

360 $\beta = -1$ 은 별개의 물리원리가 아니라 반대 공간 방향성에 대응한다. 승산적 노름
361 합성조건은 스칼라 폐합을 담당하는 내적항과 비가환적 방향생성을 담당하는
362 교차곱항을 동시에 선택한다.

363 4. 무엇이 새롭게 밝혀졌는가

364 이 연구는 쿼터니언 자체를 새로 발견한 것이 아니다. 그보다 더 근원적인
365 질문에 답한다.

366 왜 자연의 3 차원 에너지-공간 구조가 쿼터니언 대수를 요구하는가?

367 논문의 답은 다음과 같다.

368 복소 에너지의 정규화된 승산불변을 3 차원 회전 공변적 스칼라-벡터 합성에서도
369 보존해야 하기 때문이다.

370 따라서 쿼터니언 대수는 독립적으로 선택된 추상적 형식이 아니라,

- 371 • 복소 쌍대에너지
- 372 • 물리적 승산불변
- 373 • 3 차원 방향 자유도
- 374 • 회전 공변성
- 375 • 승산적 노름 합성
- 376 • 비가환적 방향폐합

377 이 동시에 성립할 때 출현하는 대수구조로 재해석된다.

378 본 연구의 핵심 성과는 다음의 명제로 압축된다.

379 Quaternionic multiplication emerges as the three-dimensional scalar-vector composition law
380 that preserves the normalized multiplicative invariant of complex dual energy.

381 즉,

382 쿼터니언 곱셈은 복소 쌍대에너지의 정규화된 승산불변을 보존하는 3 차원
383 스칼라-벡터 합성법칙으로 출현한다.

384 5. 과학방법론적 의미

385 일반적인 과학의 수학적 구성은 흔히 다음 방향으로 진행된다.

386 수학적 형식의 선택
387 $\Rightarrow$ 물리계에 적용
388 $\Rightarrow$ 관측현상의 설명.

389 그러나 본 연구는 이 순서를 역전한다.

390 물리적 본질과 불변성의 식별
391 $\Rightarrow$ 최소 공간조건의 설정
392 $\Rightarrow$ 가능한 합성법칙의 개방
393 $\Rightarrow$ 불변성에 의한 대수구조의 선택
394 $\Rightarrow$ 독립적인 물리 검증.

395 이는 COD 가 제안하는 ‘본질 기반 귀납적 존재론’의 핵심 방법이다.

396 본질 기반 귀납적 존재론은 자연을 이미 선택된 수학에 맞추는 것이 아니다.
397 자연의 가장 근원적인 불변관계를 먼저 식별하고, 그 불변관계를 일관되게
398 표현할 수 있는 수학구조가 무엇인지 귀납적으로 찾아간다.

399 이번 연구에서는 이 방법이 실제로 다음의 선택과정을 수행한다.

400 Physical Invariance
401 $\Rightarrow$ Algebraic Emergence.

402 따라서 ‘본질 기반 귀납적 존재론’은 철학적 선언에 머물지 않고, 미정계수를
403 가진 일반 합성구조에서 특정 대수를 선택하는 구체적인 수리물리학적 방법으로
404 구현된다.

405 6. 시간독립 위상평형과 QGE 검증

406 본 연구의 물리적 기반은 시간축에 따른 relaxation 이 아니라 시간독립 복소
407 정상파의 위상평형이다.

408 $\partial\Psi/\partial t = 0$.

409 따라서 QGE 의 계산 반복은 자연의 물리적 시간 흐름을 의미하지 않는다. 이는
410 하나의 정상 위상구조가 다음 조건들을 동시에 만족하는지를 탐색하는 대수적
411 계산절차이다.

412 $\kappa_i r_i = C_i$,

413 $N(Q_1 \odot Q_2)$
414 $= N(Q_1)N(Q_2)$,

415 $\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0$.

416 수학적 쿼터니언 동형성은 분석적으로 증명된다. 반면 다음 조건들은 QGE 가
417 독립적으로 검증해야 할 물리적 실현조건이다.

- 418 • 세 위상경사 축의 독립적 출현
- 419 • 3 축 등방성 또는 안정된 직교구조
- 420 • 축별 노름의 폐합
- 421 • 비가환적 방향생성
- 422 • 승산불변 residual 과 쿼터니언 closure residual 의 동시 최소화
- 423 • 외부 목표값 없이 나타나는 90° , 120° 또는 $\sqrt{3}$ 기하의 구분

424 따라서 QGE 는 정리를 성립시키기 위한 순환적 증명장치가 아니다. QGE 의
425 역할은 수학적 정리의 물리적 실현조건이 실제 시간독립 위상평형계에서
426 자율적으로 출현하는지를 반증 가능한 방식으로 시험하는 것이다.

427 7. 수리물리학적·과학사적 의의

428 이 논문은 추상대수와 물리학의 관계를 다음과 같이 재설정한다.

429 기존 관점:

430 Abstract Algebra
431 $\Rightarrow$ Physical Application.

432 본 연구의 관점:

433 Physical Invariance
434 $\Rightarrow$ Algebraic Selection
435 $\Rightarrow$ Physical Realization.

436 이 전환의 의미는 쿼터니언의 새로운 응용에 있지 않다. 자연의 물리적 불변성이
437 자신을 표현하는 대수구조를 선택할 수 있다는 사실을 구체적인 정리로 보여주는
438 데 있다.

439 복소 에너지의 승산불변이 3 차원 방향공간으로 전개될 때,

- 440 • 내적은 스칼라 폐합을 형성하고,
- 441 • 교차곱은 새로운 방향을 생성하며,
- 442 • 방향성은 $\beta = \pm 1$ 로 나타나고,
- 443 • 비가환성은 교차곱의 반대칭성에서 출현하며,
- 444 • 전체 노름은 합성 전후에 승산적으로 보존된다.

445 따라서 대수의 각 구성요소는 임의적인 기호조작이 아니라 물리적 불변성을
446 완결하기 위한 구조적 역할을 가진다.

447 결론

448 본 논문의 핵심은 다음 문장으로 요약된다.

449 A major discovery in mathematical physics demonstrating the emergence of algebraic
450 structure from physical invariance.

451 그 구체적인 수리구조는 다음과 같다.

452 Complex Dual Energy
453 $\Rightarrow$ Normalized Physical Multiplicative Invariance
454 $\Rightarrow$ Three-Dimensional Energy–Phase-Gradient Representation
455 $\Rightarrow$ Multiplicative-Norm-Preserving Closure
456 $\Rightarrow$ Quaternion Algebra.

457 수식으로는

$$\begin{aligned} 458 & I_{MI} \\ 459 & = N_C(P + iQ) \\ 460 & = N_H(P + Q^*) \end{aligned}$$

461 및

$$\begin{aligned} 462 & N(A \odot B) \\ 463 & = N(A)N(B) \end{aligned}$$

464 로 압축된다.

465 이 조건은

$$466 \alpha = 1, \quad \beta = \pm 1$$

467 을 선택하고,

$$468 (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3, \odot) \cong \mathbb{H}$$

469 를 확립한다.

470 따라서 본 연구의 중심 성과는 쿼터니언 대수의 또 다른 사용법이 아니라 그
471 물리적 발생원리의 재구성이다. 복소 쌍대에너지의 승산불변이 3 차원 에너지-
472 위상경사 기하로 전개될 때, 이를 보존하는 합성대수로 쿼터니언이 출현한다.

이는 물리적 불변성으로부터 대수구조가 발생할 수 있음을 보여주는
수리물리학적 결과이며, COD가 추구하는 본질 기반 귀납적 존재론을 실제 문제
해결 방법으로 구현한 대표적 사례이다.

COD 위상 시스템 엔지니어링 구조

